On torsion-free modules and semi-hereditary rings

東京理科大学創域理工学研究科数理科学専攻 / 株式会社スキルアップ NeXt
安藤遼哉 (Ryoya ANDO) *

概要

半遺伝環（semi-hereditary ring）は，必ずしも Noether 性を仮定しない可換環論において重要なクラスの１つである．近年，ホモロジー代数周辺の可換環論では，パーフェクトイド環論など非 Noether 環を本質的な道具として扱う議論の重要性が増してきている．歴史的には，これらの分野の研究者の主な興味の対象は Noether 環であったこともあり，Noether 性を仮定しない可換環論には依然様々な課題が存在する．本講演では，半遺伝環の構造論に関するいくつかの結果を，半遺伝環と torsion-free 加群の平坦性との関係を中心に議論する．また，Frobenius 写像の平坦性に関する下元 [Shi] の問題についても考察する．本稿はプレプリント [And24] に基づく．

1　導入

本稿を通して，環といえば 1 を持つ可換環のこととする．特に断らない限り Noether 性は課さない．

可換環論においては，分野間の関連性の強い代数幾何学で扱われる環の多くや，初等的な例が Noether 環，特に体上の有限生成代数であったことや，イデアルの有限性からくる扱いやすさもあり，Noether 環は主要な興味の対象であり，深い研究がなされてきた．一方，世界各国においては，Noether 性を仮定しない環に関する研究が脈々と続いてきたことも事実である．

近年，Noether 環のホモロジー代数的な不変量に関する「ホモロジカル予想」と呼ばれる一連の予想の研究の中で，大予想の１つであった big CM 予想が André [And18a],[And18b] によって解決された．その中で本質的に用いられてきたパーフェクトイド代数と概可換環論（almost ring theory）は非 Noether 環を積極的に扱うものであったことは注目に値する．これらについての詳細は拙稿 [And23] をご参照いただきたい．

このように，Noether 環を深く知ることが目的の研究においても，Noether とは限らない環を本質的に扱うようになってきており，Noether 性を仮定しない可換環に関する研究について注目が集まってきているという流れが存在する．

* E-mail:andou@ma.noda.tus.ac.jp, r_ando@skillupai.com.

2　パーフェクトイド代数と torsion-free 加群

局所環 $(A, \mathfrak{m}, k = A/\mathfrak{m})$ について，標数について整理をしておく．A と k の標数が同じとき，A は**等標数**であるといい，A と k の標数が異なるとき，**混標数**であるという．特に A, k の標数の組は次の４通りしかない．

表 1　局所環の標数

	A の標数	k の標数
等標数 0	0	0
等標数 p	p	p
混標数 $(0, p)$	0	p
混標数 (p^n, p)	p^n	p

ここで p は素数，$n \geq 2$ である．Frobenius 射：

$$F : A \to A; a \mapsto a^p$$

は標数 p の環においては環の射（準同型）となり，「Frobenius 射の解析が微積分の代用になる」という問題意識のもと，Frobenius 射についての解析が進められてきた．特に根底にあるものが次の Kunz の定理である．

定理 2.1 (Kunz の定理)**.**
A を標数 $p > 0$ の Noether 局所環とする．このとき次は同値である．

(i) A は正則である．
(ii) Frobenius 射 $F : a \mapsto a^p$ は平坦である．

この定理を，（Noether とは限らない）A 上の代数の言葉で言い換えることを考えてみよう．２つの A 代数を定義する．

定義 2.2 (絶対整閉包)**.**
A を整域とし，その全商環を $Q(A)$ とする．$Q(A)$ の代数閉包 $\overline{Q(A)}$ における A の整閉包を A^+ とかいて，A の**絶対整閉包 (absolute integral closure)** という．

定義 2.3 (完全環，完全閉包)**.**
環 A について, Frobenius 射 $A/pA \to A/pA$ が全単射であるとき, A は p について**完全 (perfect)** であるという．また A を正標数 p の Noether 局所環とするとき,

$$A_{\mathrm{perf}} \coloneqq \varinjlim_{F} \{A \xrightarrow{F} A \xrightarrow{F} A \xrightarrow{F} \cdots\}$$

を A の**完全閉包 (perfect closure)** という．

A が（正標数 p の Noether 局所）整域であるとき；

$$A_{\mathrm{perf}} = \left\{ a \in A^+ \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}; a^{p^n} \in A \right\}$$

とかけることに注意する．完全閉包によって，Kunz の定理は次のように言い換えることができる；

「A を標数 $p > 0$ の Noether 局所環とするとき，A が正則であることと，自然な射 $A \to A_{\mathrm{perf}}$ が平坦であることは同値.」

この完全性を混標数に一般化する方法の１つがパーフェクトイド環である．いくつか定義する方法があるが，ここではその１つを紹介する．

定義 2.4 (整パーフェクトイド環)**.**

A を p 進完備であるとする．ある $\varpi \in A$ であって，ある $u \in A^\times$ が存在して $\varpi^p = pu$ となるものが存在し，かつ Frobenius 射 $A/pA \to A/pA$ が全射でありその核が ϖ で生成されるとき，A を**整パーフェクトイド (integral prerfectoid)** であるという．

このとき，Kunz の定理は次のように混標数に一般化される．

定理 2.5 ([BIM19])**.**

A を $\mathbb{Z}_P$ 上忠実平坦な Noether 局所環とする．A が正則であることと，A 上忠実平坦な整パーフェクトイド代数が存在することは同値である．

[Lur20] は A が Noether であって，ϖ^p が p を割り切る場合の Frobenius 射 $A/\varpi A \to A/\varpi^p A$ の平坦性についての条件を与えている．それに関連して [Shi] は次の命題を示した．

命題 2.6 ([Shi, Proposition 7.12.])**.**

A を環とする．ある $\varpi \in A$ について，ある $u \in A^\times$ と $b \in A$ が存在して $\varpi^p = bu, A/bA$ が標数 p の環となっていると仮定する．このとき，ある忠実平坦 A 代数 B が存在して，Frobenius 射 $B/bB \to B/bB$ が全射でありその核が ϖ で生成されるとき，Frobenius 射 $A/\varpi A \to A/pA$ は平坦である．特に，A が付値環であるとき Frobenius 射の平坦性は保たれる．

この証明において，A が付値環であるときは，B として絶対整閉包 A^+ をとるとよく，また付値環上では次に紹介する torsion-free 加群がすべて flat となっていることが重要な役割を果たしている．そこで torsion-free 加群の定義を述べる．

定義 2.7 (torsion-free 加群)**.**

A を環とする．A 加群 M について，すべての非零因子 $a \in A$ に対して，自然な $a\cdot : M \to M$ が単射であるとき，M を torsion-free であるという．

上述の通り，命題 2.6の証明では，付値環において torsion-free 加群がすべて flat であることが重要な役割を果たしていたため，下元氏は次の問題を提唱した．

問題 2.8 ([Shi, Open Problem 7.13.])**.**

任意の torsion-free 加群 M が平坦となるような環を特徴つけよ．

3　主定理

[And24, Theorem 4.10] において，任意の加群が torsion-free になるような環は半遺伝環 (semi-hereditary ring) にほかならないことを証明し，下元氏の問題（問題 2.8）を解決した．そこで，本節では半遺伝環を定義し，[And24, Theorem 4.10] の証明の概略を述べる（定理 3.5）．

定義 3.1 (遺伝環，半遺伝環)**.**
A を環とする．A のすべてのイデアルが射影的であるとき，A を**遺伝環 (hereditary ring)** であるという．またすべての有限生成イデアルが射影的であるとき，A を**半遺伝環 (semi-hereditary ring)** であるという．

基本的な例として付値環や Dedekind 整域は半遺伝環である．詳細は述べないが，これらの環のクラスは**連接環 (coherent ring)** と呼ばれる重要な環のクラスの部分クラスである．Noether とは限らない環を扱うとは言っても，無秩序にすべての環を扱うのではなく，各種不変量などに着目して，適切なクラス分類を行っていきたいと考えることは自然であり，連接環は Noether 環の自然な一般化となっている．連接環については教科書 [Gla89] が詳しい．

[Cha60] による半遺伝環の特徴づけを紹介する．ここで，環 A 上の加群 M が torsion-less であるとは，次の線型写像が単射であることをいう．

$$M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, A), A); x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

定理 3.2 ([Cha60, theorem 4.1])**.**
環 A が半遺伝環であることと，任意の torsion-less A 加群が平坦であることは同値である．

torsion-less 加群は torsion-free であるが，逆は成り立たない（$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}$ を考えよ）． この定理により任意の torsion-free 加群が平坦であるような環は半遺伝環に限ることがわかる．

では逆について考えよう．その際次の言い換えが重要となる．

定理 3.3 ([Gla89, Corollary 4.2.19])**.**
A を環とする．次は同値である．

(i) A は半遺伝環である．
(ii) A の全商環 $Q(A)$ は von Neumann 正則，すなわち 0 次元被約環である．かつ，任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，$A_{\mathfrak{m}}$ は付値環となる．

ここで A が被約であるとき，$Q(A)$ もそうであることに注意する．さらに A が Noether のとき $\dim Q(A) = 0$ となるが，一般にはそうではない（[Que71]，[And24, Example 4.8]）．この $\dim Q(A) = 0$ という条件が，torsion-free が局所化して保たれるための十分条件として働く．

命題 3.4 ([And24, Proposition 4.5])**.**
A を $\dim Q(A) = 0$ であるような環とする．任意の torsion-free A 加群 M と，素イデアル $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して，M_P は torsion-free A_P 加群となる．

これにより，所望の定理を得ることができる．

定理 3.5 ([And24, Theorem 4.10])**.**
A を環とする．A が半遺伝環であることと，任意の torsion-free 加群が平坦であることは同値である．

証明.
$(\Longrightarrow)$
M を torsion-free A 加群とする．半遺伝環は被約であって $\dim Q(A) = 0$ であるので，命題 3.4により任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $M_{\mathfrak{m}}$ は torsion-free $A_{\mathfrak{m}}$ 加群となる．定理 3.3により $A_{\mathfrak{m}}$ は付値環であり，付値環上では torsion-free 加群は平坦なので，$M_{\mathfrak{m}}$ は平坦である．よって M も平坦となる．
$(\Longleftarrow)$
M を torsion-less 加群とすると，M は torsion-free となる．仮定より M は平坦であり，定理 3.2により A は半遺伝環である．

□

参考文献

[And23] R. Ando, *Noether とは限らない可換環上のホモロジー代数について*, 第 19 回数学総合若手研究集会：数学の交叉点 (2023), 519–524.

[And24] R. Ando, *On torsion-free modules and semi-hereditary rings*, 2024. preprint. arXiv:2412.16618.

[And18a] Y. André, *La conjecture du facteur direct*, Publications mathématiques de l'IHÉS **127** (2018), no. 1, 71-93.

[And18b] Y. André, *Le lemme d' Abhyankar perfectoide*, Publications mathématiques de l'IHÉS **127** (2018), no. 1, 1–70.

[BIM19] B. Bhatt, S. B. Iyengar, and L. Ma, *Regular rings and perfect(oid) algebras*, Comm. Alg. **47** (2019), no. 6, 2367–2383.

[Cha60] S. U. Chase, *Direct products of modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), no. 3, 457–473.

[Gla89] S. Glaz, *Commutative Coherent Rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1371, Springer–Verlag, 1989.

[Lur20] J. Lurie, *Level Structures on Elliptic Curves*, 2020. available at `https://www.math.ias.edu/~lurie/`.

[Que71] Y. Quentel, *Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau*, Bulletin de la Société Mathématique de France **99** (1971), 265–272.

[Shi] K. Shimomoto, *Lectures on perfectoid geometry for commutative algebraists*. in preparation.